15. Trasformazioni canoniche

Le trasformazioni nello spazio delle fasi sono necessarie per ricondurre un sistema hamiltoniano alla forma più semplice ove tutte le simmetrie sono esplicite. Le trasformazioni che lasciano invariata la forma delle equazioni di Hamilton si dicono canoniche e sono la base della meccanica hamiltoniana. Esse possono realizzarsi in vari modi, implicitamente attraverso le funzioni generatrici o esplicitamente mediante le serie di Lie. In questo capitolo si esamineranno le proprietà delle trasformazioni canoniche ed il loro significato geometrico. I gruppi di simmetria di trasformazioni canoniche, i cui generatori sono integrali primi del moto, consentono la formulazione hamiltoniana del teorema di Nöther.

15.1. TRASFORMAZIONI DI COORDINATE

Nello spazio delle configurazioni è possibile introdurre nuove coordinate locali $\mathbf{Q}$ sotto la sola condizione che la trasformazione sia invertibile.

$$\mathbf{Q}(\mathbf{q}, t), \qquad \mathbf{q} = \mathbf{q}(\mathbf{Q}, t) \tag{15.1.1}$$

La trasformazione sulle velocità generalizzate è indotta dalla (15.1.1) ed è lineare nelle $\dot{q}_i$.

$$\dot{Q}_i = \sum_{k1}^{d} \frac{\partial Q_i}{\partial q_k}\dot{q}_k + \frac{\partial Q_i}{\partial t}, \qquad \dot{q}_i = \sum_{k1}^{d} \frac{\partial q_i}{\partial Q_k}\dot{Q}_k + \frac{\partial q_i}{\partial t}, \tag{15.1.2}$$

Detta $\hat{\mathcal{L}}$ la lagrangiana espressa nelle nuove coordinate

$$\mathcal{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) = \hat{\mathcal{L}}(\mathbf{Q}, \dot{\mathbf{Q}}, t) \tag{15.1.3}$$

le equazioni del moto per le $\mathbf{Q}$ sono ancora quelle di Lagrange; ciò segue dal principio variazionale di Hamilton per l'azione

$$A = \int_{t_a}^{t_b} \mathcal{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) dt = \int_{t_a}^{t_b} \hat{\mathcal{L}}(\mathbf{Q}, \dot{\mathbf{Q}}, t) dt \tag{15.1.4}$$

Una traiettoria $\mathbf{q}(t)$ dello spazio $\mathcal{C}$, che rende A stazionaria, si trasforma in una traiettoria $\mathbf{Q}(t)$ su cui A è ancora stazionaria e quindi soddisfa le equazioni di Lagrange

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \hat{\mathcal{L}}}{\partial \dot{Q}_i} - \frac{\partial \hat{\mathcal{L}}}{\partial Q_i} = 0 \tag{15.1.5}$$

La trasformazione di coordinate induce una trasformazione nello spazio delle fasi. I vecchi e nuovi momenti p_i e P_i

$$p_i = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i}, \qquad P_i = \frac{\partial \hat{\mathcal{L}}}{\partial \dot{Q}_i} \tag{15.1.6}$$

sono legati da una trasformazione lineare i cui coefficienti dipendono dalle coordinate

$$P_i = \sum_{k=1}^{d} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_k}\frac{\partial \dot{q}_k}{\partial \dot{Q}_i} = \sum_{k=1}^{d} p_k \frac{\partial q_k}{\partial Q_i} \tag{15.1.7}$$

dove la derivata di $\dot{q}_k$ rispetto a $\dot{Q}_k$ è stata riespressa attraverso la (15.1.2).
Le hamiltoniane sono date da

$$H(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t) = \sum_{i=1}^{d} p_i \dot{q}_i - \mathcal{L}, \qquad \hat{H}(\mathbf{Q}, \mathbf{P}, t) = \sum_{i=1}^{d} P_i \dot{Q}_i - \hat{\mathcal{L}} \tag{15.1.8}$$

e le equazioni del moto hanno la consueta forma hamiltoniana anche nel nuovo sistema di coordinate

$$\dot{Q}_i = \frac{\partial \hat{H}}{\partial P_i}, \qquad \dot{P}_i = -\frac{\partial \hat{H}}{\partial Q_i} \tag{15.1.9}$$

In generale $\hat{H}$ differisce da H poiché

$$\sum_{i=1}^{d} P_i \dot{Q}_i = \sum_{k=1}^{d} p_k \sum_{i=1}^{d} \frac{\partial q_k}{\partial Q_i}\dot{Q}_i = \sum_{k=1}^{d} p_k \left(\dot{q}_k - \frac{\partial q_k}{\partial t} \right) \tag{15.1.10}$$

e quindi

$$\hat{H}(\mathbf{Q}, \mathbf{P}, t) = H(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t) - \sum_{k=1}^{d} p_k \frac{\partial q_k}{\partial t} \tag{15.1.11}$$

e $\hat{H} = H$ soltanto se la trasformazione non dipende dal tempo. Il risultato è intuitivo, perché solo una trasformazione che non dipende da t non cambia l'energia cinetica.

Trasformazioni nello spazio delle fasi.

Nello spazio delle fasi non è in generale possibile effettuare una generica trasformazione di coordinate con la sola richiesta che sia invertibile

$$\begin{cases} \mathbf{Q} = \mathbf{Q}(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t) \\ \mathbf{P} = \mathbf{P}(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t) \end{cases} \qquad \begin{cases} \mathbf{q} = \mathbf{q}(\mathbf{Q}, \mathbf{P}, t) \\ \mathbf{p} = \mathbf{p}(\mathbf{Q}, \mathbf{P}, t) \end{cases} \tag{15.1.12}$$

senza alterare la struttura delle equazioni del moto di Hamilton.
Riscriviamo quindi le equazioni di Hamilton in modo compatto introducendo le seguenti notazioni

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} \mathbf{q} \\ \mathbf{p} \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{X} = \begin{pmatrix} \mathbf{Q} \\ \mathbf{P} \end{pmatrix}, \qquad \mathsf{J} = \begin{pmatrix} 0 & \mathsf{I} \\ -\mathsf{I} & 0 \end{pmatrix} \tag{15.1.13}$$

dove J è una matrice antisimmetrica $2d \times 2d$, I la matrice identità $d \times d$. Le equazioni di Hamilton nelle coordinate iniziali si scrivono

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathsf{J} \frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}} \tag{15.1.14}$$

Consideriamo ora una trasformazione $\mathbf{x} \to \mathbf{X}$ indipendente da t ed osserviamo che detta M la matrice jacobiana della trasformazione

$$\mathsf{M}_{ik} = \frac{\partial X_i}{\partial x_k} \tag{15.1.15}$$

si ha

$$\begin{aligned} \frac{dX_i}{dt} &= \sum_{\ell=1}^{2d} \frac{\partial X_i}{\partial x_\ell} \frac{dx_\ell}{dt} = \sum_{\ell,m}^{2d} \frac{\partial X_i}{\partial x_\ell} \mathsf{J}_{\ell m} \frac{\partial H}{\partial x_m} = \\ &= \sum_{\ell,m,k=1}^{2d} \frac{\partial X_i}{\partial x_\ell} \mathsf{J}_{\ell m} \frac{\partial \hat{H}}{\partial X_k} \frac{\partial X_k}{\partial x_m} = \\ &= \sum_{\ell,m,k=1}^{2d} \mathsf{M}_{i\ell} \mathsf{J}_{\ell m} \tilde{\mathsf{M}}_{mk} \frac{\partial \hat{H}}{\partial X_k} \end{aligned} \tag{15.1.16}$$

Nelle nuove coordinate le equazioni del del moto diventano

$$\dot{\mathbf{X}} = \mathsf{P} \frac{\partial \hat{H}}{\partial \mathbf{X}} \qquad \mathsf{P} = \mathsf{M} \mathsf{J} \tilde{\mathsf{M}} \tag{15.1.17}$$

La forma delle equazioni del moto resta invariata se $\mathsf{P} = \mathsf{M}\mathsf{J}\tilde{\mathsf{M}} = \mathsf{J}$. Se alle equazioni di Hamilton $\dot{\mathbf{X}} = \mathsf{J}\frac{\partial}{\partial \mathbf{X}} H$, applichiamo la trasformazione inversa $\mathbf{X} \to \mathbf{x}$, la cui matrice jacobiana è M^{-1}, si ottiene $\dot{\mathbf{x}} = \mathsf{P}\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} H$, dove $\mathsf{P} = \mathsf{M}^{-1}\mathsf{J}\tilde{\mathsf{M}}^{-1}$. La condizione di invarianza diventa $\mathsf{P} = \mathsf{J}$ ovvero $\tilde{\mathsf{P}}^{-1} = \mathsf{J}$ da cui segue $\tilde{\mathsf{M}}\mathsf{J}\mathsf{M} = \mathsf{J}$. Questa condizione è equivalente alla precedente; infatti essendo $\mathsf{J}^2 = -\mathsf{I}$ dalla prima si ricava $\tilde{\mathsf{M}} = -\mathsf{J}\mathsf{M}^{-1}\mathsf{J}$ da cui segue la seconda. Chiamiamo simplettica una matrice M tale che

$$\mathsf{M}\mathsf{J}\tilde{\mathsf{M}} = \mathsf{J}, \qquad \tilde{\mathsf{M}}\mathsf{J}\mathsf{M} = \mathsf{J} \tag{15.1.18}$$

Definizione Si dice canonica una trasformazione la cui matrice jacobiana sia simplettica, perché mantiene la forma canonica delle equazioni del moto di Hamilton.

Se la trasformazione è lineare $\mathbf{Q} = \mathsf{A}\mathbf{q}$, $\mathbf{P} = \mathsf{B}\mathbf{p}$, la matrice M è diagonale a blocchi $\mathsf{M} = \mathsf{A} \oplus \mathsf{B}$ e la condizione di simpletticità (15.1.18) è soddisfatta se $\mathsf{B} = \tilde{\mathsf{A}}^{-1}$.
Se l'hamiltoniana H dipende dal dal tempo la si rende indipendente aumentando di 2 la dimensione dello spazio delle fasi: introducendo il vettore $\mathbf{y} = (\mathbf{q}, q_{d+1}, \mathbf{p}, p_{d+1})$ l'hamiltoniana H è sostituita da $K(\mathbf{y}) = p_{d+1} + H(\mathbf{q}, \mathbf{p}, q_{d+1})$.

15.2. COORDINATE NON CANONICHE

Consideriamo la forma più generale (15.1.16) che assumono le equazioni di Hamilton per un sistema unidimensionale $d = 1$, quando le coordinate scelte $\mathbf{x} = (x, p)$ non sono canoniche. Se si parte da un sistema di coordinate canoniche $\mathbf{X} = (X, P)$ con hamiltoniana H, le equazioni del moto nelle coordinate $\mathbf{x}$ sono

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathsf{P}\,\frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}}, \qquad \mathsf{P} = \mathsf{M}^{-1}\mathsf{J}\tilde{\mathsf{M}}^{-1} \tag{15.2.1}$$

dove la matrice jacobiana M è definita da (15.1.5) . Usando la identità $\mathsf{A}\mathsf{J}\tilde{\mathsf{A}} = \mathsf{J}\det\mathsf{A}$ valida se e solo se A è una generica matrice 2×2, si può scrivere $\mathsf{P} = c^{-1}(\mathbf{x})\,\mathsf{J}$ dove $c(\mathbf{x}) = \det\mathsf{M}$. Se la trasformazione di coordinate $\mathbf{X} \to \mathbf{x}$ è globalmente invertibile, allora $c(\mathbf{x})$ ha sempre segno definito ed è non singolare. Se scriviamo le equazioni del moto (15.2.1) nella forma $\dot{\mathbf{x}} = \boldsymbol{\Phi}$, al campo vettoriale $\boldsymbol{\Phi} = c^{-1}\,\mathsf{J}\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}}H$ risulta associata una forma differenziale chiusa scegliendo $c(\mathbf{x})$ come fattore integrante

$$dH = -c(\mathbf{x})\,\mathsf{J}\,\boldsymbol{\Phi} = -c\,\Phi_p\,dx + c\,\Phi_x dp \tag{15.2.2}$$

La funzione H è globalmente definita poiché il fattore integrante $c(\mathbf{x})$ è regolare ovunque; dH è una forma differenziale esatta e H è un integrale primo del moto, vedi paragrafo 2.1. Le equazioni di Hamilton (15.2.1) in coordinate non canoniche costituiscono una *struttura di Poisson* poiché la matrice P è antisimmetrica e soddisfa la seguente identità (detta di Jacobi) $\mathsf{P}_{\ell i}\,\partial_\ell\,\mathsf{P}_{jk} + \mathsf{P}_{\ell k}\,\partial_\ell\,\mathsf{P}_{ij} + \mathsf{P}_{\ell j}\,\partial_\ell\,\mathsf{P}_{ki} = 0$, che si verifica facilmente se $\mathsf{P} = c^{-1}(\mathbf{x})\,\mathsf{J}$.

A titolo di esempio consideriamo il sistema di equazioni lineari

$$\dot{q} = \lambda q, \qquad \dot{p} = \mu p \tag{15.2.3}$$

Se scegliamo

$$c(q,p) = \frac{1}{qp}, \qquad H(q,p) = -\mu\log|q| + \lambda\log|p| \tag{15.2.4}$$

le equazioni del moto sono in forma hamiltoniana non canonica e c risulta singolare sugli assi coordinati. Su ciascun quadrante H è definito e la sua estensione a tutto il piano è possibile perché le orbite appartengono ai quadranti da cui hanno origine. Se sul primo quadrante facciamo la trasformazione $Q = \log q$, $P = \log P$ l'hamiltoniana (15.2.5) diventa $H = \lambda P - \mu Q$ e le equazioni del moto $\dot{Q} = \lambda$, $\dot{P} = \mu$ hanno forma canonica.

15.3. CONSERVAZIONE DEI VOLUMI

La forma canonica delle equazioni del moto di Hamilton conferisce al flusso alcune rilevanti proprietà geometriche, tra cui la conservazione dei volumi nello spazio delle fasi. Deduciamo questo risultato, dovuto a Liouville, dal teorema generale sulla trasformazione dei volumi per il flusso di un arbitrario campo vettoriale $\boldsymbol{\Phi}(\mathbf{x}, t)$ con $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d$.

Il flusso $\mathbf{x} = S(\mathbf{X}; t, t_0)$ della equazione differenziale $\dot{\mathbf{x}} = \boldsymbol{\Phi}(\mathbf{x}, t)$ trasforma il punto iniziale $\mathbf{X}$ in $\mathbf{x}$ ed il suo jacobiano è

$$\mu_{L}(\mathbf{X}, t) = \det \mathsf{M} \qquad \mathsf{M}_{ij} = \frac{\partial x_i}{\partial X_j} \equiv \frac{\partial S_i}{\partial X_j}(\mathbf{X}; t, t_0) \tag{15.3.1}$$

Come qualsiasi altra variabile dinamica lo Jacobiano può esprimersi come funzione del punto $\mathbf{x}$ della traiettoria al tempo t (*forma euleriana*) $\mu_{E}(\mathbf{x}, t)$ oltre che come funzione del punto iniziale $\mathbf{X}$ e di t (*forma lagrangiana*) $\mu_{L}(\mathbf{X}, t)$ dove

$$\mu_{L}(\mathbf{X}, t) = \mu_{L}(S^{-1}(\mathbf{x}; t, t_0), t) = \mu_{E}(\mathbf{x}, t) \tag{15.3.2}$$

Le derivate temporali hanno espressioni diverse perché nella forma euleriana $\mathbf{x}$ è un punto dell'orbita e varia con t

$$\frac{d\mu_{L}}{dt} = \frac{\partial \mu_{L}}{\partial t}, \qquad\qquad \frac{d\mu_{E}}{dt} = \frac{\partial \mu_{E}}{\partial t} + \boldsymbol{\Phi} \cdot \frac{\partial \mu_{E}}{\partial \mathbf{x}} \tag{15.3.3}$$

Nel seguito ometteremo di mettere gli indici E, L essendo evidente che la dipendenza da $\mathbf{x}$ o $\mathbf{X}$ indicano la forma euleriana o quella lagrangiana.

Proposizione. La variazione dello jacobiano μ lungo l'orbita è data da

$$\frac{d\mu}{dt} = \mu \operatorname{div} \boldsymbol{\Phi} \tag{15.3.4}$$

che in forma euleriana si scrive

$$\frac{\partial \mu}{\partial t} + \boldsymbol{\Phi} \cdot \frac{\partial \mu}{\partial \mathbf{x}} = \mu \operatorname{div} \boldsymbol{\Phi} \tag{15.3.5}$$

Per dimostrare il risultato espresso da (15.3.4) scriviamo μ usando la definizione di determinante e cioè

$$\mu = \sum_{j_1, \dots, j_d} \epsilon_{j_1, \dots, j_d} \mathsf{M}_{1 j_1} \cdots \mathsf{M}_{d j_d} \tag{15.3.6}$$

dove $\epsilon_{j_1,\dots,j_d}$ è il tensore completamente antisimmetrico di rango d: esso vale 1 o -1 se gli indici $j_1,\dots,j_d$ sono una permutazione pari o dispari di $1,\dots,d$. Se $\boldsymbol{\Phi}(\mathbf{x},t)$ è sufficientemente regolare si ha

$$\frac{d}{dt}\mathsf{M}_{k\,j_k} = \frac{\partial}{\partial X_{j_k}}\frac{dx_k}{dt} = \frac{\partial \Phi_k}{\partial X_{j_k}}(\mathbf{x},t) = \sum_\ell \frac{\partial \Phi_k(\mathbf{x},t)}{\partial x_\ell}\mathsf{M}_{\ell\,j_k} \tag{15.3.7}$$

Derivando la (15.3.6) rispetto a t si trova

$$\begin{aligned}\frac{d\mu}{dt} &= \sum_{j_1,\dots,j_d} \epsilon_{j_1,\dots,j_d} \sum_k \mathsf{M}_{1\,j_1}\dots\left(\frac{d}{dt}\mathsf{M}_{k\,j_k}\right)\cdots\mathsf{M}_{d\,j_d} = \\ &= \sum_{j_1,\dots,j_d} \epsilon_{j_1,\dots,j_d} \sum_{k,\ell} \frac{\partial \Phi_k}{\partial x_\ell}\mathsf{M}_{1\,j_1}\cdots\mathsf{M}_{\ell\,j_k}\cdots\mathsf{M}_{d\,j_d}\end{aligned} \tag{15.3.8}$$

Se scambiamo gli ordini di somma, effettuando per prima la somma su $j_1,\dots,j_d$, il risultato è zero tranne che se $\ell = k$. Infatti per $\ell \neq k$ si hanno due righe uguali nella nuova matrice di cui stiamo calcolando il determinante. Il risultato si scrive nella forma seguente

$$\frac{d\mu}{dt} = \sum_k \frac{\partial \Phi_k}{\partial x_k} \sum_{j_1,\dots,j_d} \epsilon_{j_1,\dots,j_d}\mathsf{M}_{1\,j_1}\cdots\mathsf{M}_{k\,j_k}\cdots\mathsf{M}_{d\,j_d} = \det\mathsf{M}\ \mathrm{div}\,\boldsymbol{\Phi} \tag{15.3.9}$$

Una conseguenza di questo teorema è che se la divergenza del campo è negativa i volumi si contraggono, se è positiva si espandono, se è nulla si conservano. Se l'equazione è lineare $\dot{\mathbf{x}} = \mathsf{A}\mathbf{x}$ si verifica direttamente la (15.3.4) poiché $\mu = \det e^{\mathsf{A}t} = e^{t\ \mathrm{Tr}\ \mathsf{A}}$, per una nota proprietà del determinante. Si noti che la contrazione dei volumi è condizione necessaria ma non sufficiente per la stabilità, che richiede invece la contrazione lungo una direzione qualunque. Come esempio del calcolo di μ consideriamo la equazione $\dot{x} = x^2$ per la quale si ha $x = S_t(X) = X(1-Xt)^{-1}$ da cui $X = S_{-t}(x) = x(1+xt)^{-1}$. Lo jacobiano vale $\mu = dx/dX = (1-Xt)^{-2}$ nella formulazione lagrangiana e $\mu = (1+xt)^{-2}$ in quella euleriana. In entrambi i casi si verifica che $d\mu/dt = 2x\mu$ in accordo con (15.3.4).

Trasformazioni nel piano

Se lo spazio delle fasi è il piano si può derivare (15.3.4) in modo diretto e geometricamente più intuitivo. Consideriamo un parallelogramma infinitesimo i cui spigoli siamo PA e PB e la sua immagine dopo un tempuscolo dt, anch'essa un parallelogramma di spigoli $P'A'$ e $P'B'$. Se $P-O=\mathbf{x}$, $A-O=\mathbf{x}+\mathbf{a}$, $B-O=\mathbf{x}+\mathbf{b}$ sono i vettori che individuano i vertici del primo parallelogramma, e $P'-O=\mathbf{x}'$, $A'-O=\mathbf{x}'+\mathbf{a}'$, $B'-O=\mathbf{x}'+\mathbf{b}'$ i loro trasformati, gli spigoli $\mathbf{a}'$, $\mathbf{b}'$ del parallelogramma trasformato sono dati da

$$\mathbf{a}' = \mathbf{a} + (\boldsymbol{\Phi}(\mathbf{x}+\mathbf{a}) - \boldsymbol{\Phi}(\mathbf{x}))dt = (\mathsf{I}+\mathsf{F}dt)\mathbf{a}, \qquad \mathbf{b}' = \mathbf{b} + (\boldsymbol{\Phi}(\mathbf{x}+\mathbf{b}) - \boldsymbol{\Phi}(\mathbf{x}))dt = (\mathsf{I}+\mathsf{F}dt)\mathbf{b} \tag{15.3.10}$$

L'evoluzione è approssimata al primo ordine in dt scrivendo $\mathbf{x}' = S(\mathbf{x},t+dt,t) = \mathbf{x}+\boldsymbol{\Phi}(\mathbf{x})dt$ e tenendo solo i termini lineari in $\mathbf{a}$ e $\mathbf{b}$ dopo aver definito $\mathsf{F}_{ij} = \partial\Phi_i/\partial x_j$. L'area orientata del primo parallelogramma è $d\sigma = (\mathbf{a}\times\mathbf{b})_3 = \mathbf{a}\cdot\mathsf{J}\mathbf{b}$ e quella del suo trasformato

$$d\sigma' = \mathbf{a}'\cdot\mathsf{J}\mathbf{b}' = \mathbf{a}\cdot(\mathsf{I}+\tilde{\mathsf{F}}dt)\,\mathsf{J}\,(\mathsf{I}+\mathsf{F}dt)\mathbf{b} = d\sigma(1+\mathrm{Tr}\,\mathsf{F}\ dt) = d\sigma(1+\mathrm{div}\,\boldsymbol{\Phi}\ dt) \tag{15.3.11}$$

dove si è usata l'identità $\tilde{\mathsf{F}}\mathsf{J} + \mathsf{J}\mathsf{F} = \mathsf{J}\,\mathrm{Tr}\,\mathsf{F}$ ed è stato trascurato il termine di ordine dt^2. Detto t l'istante iniziale si può riscriverla (15.3.11) nella forma $\mu(t+dt) = \mu(t)d\sigma'/d\sigma$ in accordo con (15.3.4). Usando coordinate non canoniche il campo $\boldsymbol{\Phi}$ per un sistema hamiltoniano è $\boldsymbol{\phi} = c^{-1}(\mathbf{x})\,\mathsf{J}\,\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}}H$ e tenendo conto di (15.3.13) la sua divergenza è

$$\mathrm{div}\,\boldsymbol{\Phi} = \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}}\left(c^{-1}\cdot \mathsf{J}\frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}}\right) = c\frac{\partial\, c^{-1}}{\partial \mathbf{x}}\cdot\boldsymbol{\Phi} = c\frac{dc^{-1}}{dt} \tag{15.3.12}$$

La equazione (15.3.4) diventa $\frac{d}{dt}\log\mu = \frac{d}{dt}\log c^{-1}$ e mostra che $\mu c =$ è costante.

Teorema di Liouville. Il flusso hamiltoniano in coordinate canoniche conserva i volumi.

Cominciamo con l'osservare che il campo vettoriale corrispondente alle equazioni di Hamilton, scritte in forma canonica, ha divergenza nulla. Infatti

$$\boldsymbol{\Phi} = \mathsf{J}\,\frac{\partial H}{\partial x}, \qquad \mathrm{div}\,\boldsymbol{\Phi} = \sum_{ik}\mathsf{J}_{ik}\frac{\partial^2 H}{\partial x_i \partial x_k} = 0 \tag{15.3.13}$$

poiché la matrice J è antisimmetrica e la matrice hessiana di H è simmetrica. Ne segue che $\mu = 1$, poiché μ è costante lungo ogni orbita e per $t = 0$ vale 1 . Se le equazioni non sono in forma canonica il flusso conserva una misura; quando $d = 1$ da (15.3.12) segue che μc è costante lungo ogni orbita e quindi c è la densità della misura conservata poiché $c(\mathbf{x})\,d\mathbf{x} = c(\mathbf{X})\,d\mathbf{X}$.

Equazione di continuità

Consideriamo un insieme di N punti (eventualmente con $N \to \infty$) e definiamo la densità $\rho_0(\mathbf{X}) = N^{-1}\,dn/dV_0$, dove dV_0 è il volume di un intorno infinitesimo $\mathcal{D}_X$ del punto $\mathbf{X}$ e dn è il numero di punti che vi cadono. Poiché l'integrale di ρ sullo spazio delle fasi vale 1, la interpretiamo come una densità di probabilità, vedi capitolo 24. Se il flusso trasforma il punto $\mathbf{X}$ in $\mathbf{x} = S(\mathbf{X}; t, t_0)$ e il suo intorno infinitesimo $\mathcal{D}_X$ in $\mathcal{D}_x$, il cui volume è dV, la densità $\rho(\mathbf{x}, t)$ è data da

$$\rho(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{N}\frac{dn}{dV} = \frac{1}{N}\frac{dn}{dV_0}\frac{dV_0}{dV} = \frac{\rho_0(\mathbf{X}, 0)}{\mu(\mathbf{x}, t)} \tag{15.3.14}$$

L' evoluzione di ρ è governata dalla *equazione di continuità*, che esprime la conservazione del numero di punti

$$\frac{d\rho}{dt} = -\frac{\rho_0(\mathbf{X}, 0)}{\mu^2}\frac{d\mu}{dt} = -\frac{\rho_0(\mathbf{X}, 0)}{\mu}\mathrm{div}\,\Phi = -\rho(\mathbf{x}, t)\mathrm{div}\,\Phi \tag{15.3.15}$$

Scrivendo la derivata temporale nella forma euleriana la equazione di continuità diventa

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \boldsymbol{\Phi}\cdot\frac{\partial \rho}{\partial \mathbf{x}} + \rho\,\mathrm{div}\,\boldsymbol{\Phi} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathrm{div}(\rho\boldsymbol{\Phi}) = 0 \tag{15.3.16}$$

15.4. FUNZIONI GENERATRICI

La condizione (15.1.17) ottenuta nel primo paragrafo consente di determinare se una assegnata trasformazione sia o meno canonica. Tuttavia, tranne il caso delle trasformazioni lineari, bisogna ricorrere ad altri schemi come quello della funzione generatrice se si vuol costruire esplicitamente una trasformazione canonica.
Introduciamo le funzioni generatrici partendo dalla formulazione variazionale delle equazioni del moto. Una traiettoria $(\mathbf{q}(t), \mathbf{p}(t))$, che in un dato sistema di coordinate soddisfa le equazioni di Hamilton con hamiltoniana H, rende stazionaria l'azione

$$A = \int_{t_a}^{t_b} \left(\sum_{i=1}^{d} p_i \dot{q}_i - H(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t) \right) dt \qquad (15.4.1)$$

La traiettoria $\mathbf{Q}(t), \mathbf{P}(t)$ ottenuta trasformando $\mathbf{q}(t), \mathbf{p}(t)$ tramite un cambiamento di coordinate $\mathbf{Q} = \mathbf{Q}(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t)$ $\mathbf{P} = \mathbf{P}(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t)$, soddisfa ancora le equazioni di Hamilton con hamiltoniana $\hat{H}$, solo se rende stazionaria l'azione trasformata $\hat{A}$, che si scrive

$$\hat{A} = \int_{t_a}^{t_b} \left(\sum_{i=1}^{d} P_i \dot{Q}_i - \hat{H}(\mathbf{Q}, \mathbf{P}, t) \right) dt \qquad (15.4.2)$$

Lo spazio $\mathcal{C}$, su cui A è definita, è quello delle traiettorie con condizioni agli estremi $\mathbf{q}(t_a) = \mathbf{q}_a, \mathbf{q}(t_b) = \mathbf{q}_b$; lo spazio $\hat{\mathcal{C}}$, su cui è definita $\hat{A}$, quello delle traiettorie con condizioni agli estremi $\mathbf{Q}(t_a) = \mathbf{Q}_a, \mathbf{Q}(t_b) = \mathbf{Q}_b$. Gli estremi $\mathbf{q}_a$, $\mathbf{q}_b$ e $\mathbf{Q}_a$, $\mathbf{Q}_b$ sono fissati per tutte le traiettorie e la trasformazione invertita parzialmente nella forma

$$\mathbf{p} = \mathbf{p}(\mathbf{q}, \mathbf{Q}, t), \qquad \mathbf{P} = \mathbf{P}(\mathbf{q}, \mathbf{Q}, t) \qquad (15.4.3)$$

fissa anche i momenti $\mathbf{p}_a$, $\mathbf{p}_b$ e $\mathbf{P}_a$, $\mathbf{P}_b$ agli istanti t_a, t_b. Alla stessa conclusione si giunge considerando che i momenti $\mathbf{p}_a$, $\mathbf{p}_b$ risultano fissati sulla traiettoria fisica e questi determinano univocamente gli estremi $\mathbf{Q}_a$, $\mathbf{Q}_b$ nelle nuove coordinate, che vanno mantenuti fissi. Lo spazio $\mathcal{C} \cap \hat{\mathcal{C}}$ è quello delle traiettorie i cui estremi nel spazio delle fasi sono fissati, come conseguenza del vincolo imposto dalla trasformazione di coordinate. Anche su questo spazio più ristretto la traiettoria fisica risulta stazionaria rispetto alle traiettorie variate e la variazione di $\hat{S} - S$ deve risultare identicamente nulla. La trasformazione espressa nella forma (15.4.3) consente di considerare $\hat{A} - A$ come una funzione definita nel prodotto di due spazi delle configurazioni ove le traiettorie $(\mathbf{q}(t), \mathbf{Q}(t))$ hanno estremi fissati per $t = t_a, t_b$. Un funzionale che abbia variazione identicamente nulla è una funzione degli estremi ossia

$$A - \hat{A} = \int_{t_a}^{t_b} \frac{d}{dt} F_1(\mathbf{q}(t), \mathbf{Q}(t), t) dt = F_1(\mathbf{q}_b, \mathbf{Q}_b, t_b) - F_1(\mathbf{q}_a, \mathbf{Q}_a, t_a) \qquad (15.4.4)$$

Se vale (15.4.4) le equazioni di Hamilton nelle nuove coordinate sono in forma canonica.

Al fine di ricavare le equazioni di trasformazione consideriamo $\hat{A} - A$ come un integrale di linea di una forma differenziale, definita sul prodotto diretto dei due spazi delle configurazioni. La condizione (15.4.4) è che l'integrale di linea dipenda solo dagli estremi di integrazione e non dalla traiettoria seguita e quindi $\hat{A} - A$ sia l'integrale di linea di una forma differenziale esatta $dF_1(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t) = \sum(\mathbf{p}_i d\mathbf{q}_i - \mathbf{P}_i d\mathbf{Q}_i) + (\hat{H} - H)dt$. Lasciando variare il punto finale $(\mathbf{q}, \mathbf{Q}, t)$ e scegliendo F nulla nel primo estremo scriviamo

$$F_1(\mathbf{q}, \mathbf{Q}, t) = \int_{(\mathbf{q}_a, \mathbf{Q}_a, t_a)}^{(\mathbf{q}, \mathbf{Q}, t)} \left[\sum_{i=1}^{d} (p_i(\mathbf{q}, \mathbf{Q}, \tau) dq_1 - P_i(\mathbf{q}, \mathbf{Q}, \tau) dQ_i) + (\hat{H} - H) d\tau \right] \quad (15.4.5)$$

dove l'integrale è calcolato lungo una traiettoria qualsiasi che congiunge $(\mathbf{q}_a, \mathbf{Q}_a, t_a)$ e $(\mathbf{q}, \mathbf{Q}, t)$ parametrizzata con $\mathbf{q} = \mathbf{q}(\tau)$, $\mathbf{Q} =, \mathbf{Q}(\tau)$ dove $\tau \in [t_a, t_b]$.

Proposizione. Condizione necessaria e sufficiente perché una trasformazione sia canonica è che la forma differenziale

$$\sum_{i=1}^{d} (p_i dq_i - P_i dQ_i) + (\hat{H} - H)dt = dF_1(\mathbf{q}, \mathbf{Q}, t) \quad (15.4.6)$$

sia esatta. La funzione F_1 è detta generatrice della trasformazione.

Se la trasformazione è data nella forma $\mathbf{Q} = \mathbf{Q}(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t), \mathbf{P} = \mathbf{P}(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t)$ allora occorre invertirla nella forma (15.4.3) per costruire la forma differenziale (15.4.6). Viceversa data la generatrice F_1 si ha che

$$p_i = \frac{\partial F_1}{\partial q_i}, \qquad P_i = -\frac{\partial F_1}{\partial Q_i}, \qquad \hat{H} = H + \frac{\partial F_1}{\partial t} \quad (15.4.7)$$

Le equazioni (15.4.7) danno la trasformazione in forma implicita (15.4.3); invertendo la prima equazione si ottiene $\mathbf{Q} = \mathbf{Q}(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t)$, che, sostituita nella seconda, dà la trasformazione nella forma voluta.

Si possono ottenere altre funzioni generatrici mediante trasformazioni di Legendre. Consideriamo dapprima le funzioni $F_2(\mathbf{q}, \mathbf{P}), F_3(\mathbf{p}, \mathbf{Q}), F_4(\mathbf{p}, \mathbf{P})$ definite da

$$\begin{aligned} F_2 &= \sum_{i=1}^{d} P_i Q_i + F_1(\mathbf{q}, \mathbf{Q}) \\ F_3 &= -\sum_{i=1}^{d} p_i q_i + F_1(\mathbf{q}, \mathbf{Q}) \\ F_4 &= \sum_{i=1}^{d} P_i Q_i + F_3(\mathbf{q}, \mathbf{Q}) = \sum_{i=1}^{d} (P_i Q_i - p_i q_i) + F_1(\mathbf{q}, \mathbf{Q}) \end{aligned} \quad (15.4.8)$$

Le equazioni che definiscono le varie trasformazioni sono quindi espresse da

$$\begin{array}{lll} p_i = \dfrac{\partial F_2}{\partial q_i} & Q_i = \dfrac{\partial F_2}{\partial P_i} & \hat{H} = H + \dfrac{\partial F_2}{\partial t} \\ q_i = -\dfrac{\partial F_3}{\partial p_i} & P_i = -\dfrac{\partial F_3}{\partial Q_i} & \hat{H} = H + \dfrac{\partial F_3}{\partial t} \\ q_i = -\dfrac{\partial F_4}{\partial p_i} & Q_i = \dfrac{\partial F_4}{\partial P_i} & \hat{H} = H + \dfrac{\partial F_4}{\partial t} \end{array} \tag{15.4.9}$$

Inoltre le condizioni necessarie perché un trasformazione espressa rispettivamente nelle quattro forme sia canonica si ottengono uguagliando le derivate seconde miste delle funzioni generatrici

$$\begin{array}{ll} \dfrac{\partial p_i}{\partial Q_k} = -\dfrac{\partial P_k}{\partial q_i} & \dfrac{\partial p_i}{\partial P_k} = \dfrac{\partial Q_k}{\partial q_i} \\ \dfrac{\partial q_i}{\partial Q_k} = \dfrac{\partial P_k}{\partial p_i} & \dfrac{\partial q_i}{\partial P_k} = -\dfrac{\partial Q_k}{\partial p_i} \end{array} \tag{15.4.10}$$

Di particolare interesse sono le trasformazioni prodotte dalla generatrici di tipo due, perché comprendono la trasformazione identica e le trasformazioni indotte dal cambiamento di coordinate nello spazio delle configurazioni. Infatti

$$F_2 = \sum_{i=1}^{d} q_k P_k \tag{15.4.11}$$

genera la trasformazione identità $Q_i = q_i$, $p_i = P_i$ mentre

$$F_2 = \sum_{k=1}^{d} f_k(\mathbf{q}) P_k \tag{15.4.12}$$

genera la trasformazione puntuale

$$Q_i = f_i(\mathbf{q}), \qquad p_i = \sum_{k=1}^{d} \frac{\partial f_k(\mathbf{q})}{\partial q_i} P_k \tag{15.4.13}$$

Altre funzioni generatrici È possibili costruire d^2 funzioni generatrici facendo trasformazioni di Legendre solo su una parte delle vecchie o nuove variabili. Definiamo ad esempio per $0 \leq m, n \leq d$

$$F(q_1, \ldots, q_n, p_{n+1}, \ldots, p_d, Q_1, \ldots, Q_m, P_{m+1}, \ldots, P_d) = F_1 + \sum_{i=m+1}^{d} P_i Q_i - \sum_{i=n+1}^{d} p_i q_i \tag{15.4.14}$$

dove la somme sono da intendersi assenti se $m = d$ oppure $n = d$. Le relazioni di trasformazioni sono allora date da

$$\begin{aligned} p_i &= \frac{\partial F}{\partial q_i}, & i &= 1, \dots, n, & q_i &= -\frac{\partial F}{\partial p_i}, & i &= n+1, \dots, d \\ P_i &= -\frac{\partial F}{\partial Q_i}, & i &= 1, \dots, m, & Q_i &= \frac{\partial F}{\partial P_i}, & i &= m+1, \dots, d \end{aligned} \tag{15.4.15}$$

Notiamo che le quattro generatrici introdotte in precedenza sono casi particolari corrispondenti alle scelte $n = m = d$; $n = d, m = 0$; $n = 0, m = d$; $n = m = 0$.

Esempi

Consideriamo una generatrice quadratica di tipo 1 data da

$$F_1 = \alpha q^2 + 2\beta q Q + \gamma Q^2 \tag{15.4.16}$$

Tramite (15.4.7) si determina la trasformazione in forma implicita

$$p = \frac{\partial F_1}{\partial q} = 2\alpha q + 2\beta Q, \qquad P = -\frac{\partial F_1}{\partial Q} = -2\beta q - 2\gamma Q \tag{15.4.17}$$

Invertendo rispetto a Q, P si ottiene

$$Q = -\frac{\alpha}{\beta} q + \frac{1}{2\beta} p, \qquad P = 2\left(\frac{\alpha\gamma}{\beta} - \beta\right) q - \frac{\gamma}{\beta} p \tag{15.4.18}$$

trasformazione lineare con matrice dei coefficienti a determinante 1.

Un altro esempio è la generatrice di tipo 1 delle trasformazioni a variabili azione angolo per l'oscillatore armonico

$$F_1(q, Q) = -\omega \frac{q^2}{2} \tan Q \tag{15.4.19}$$

dalle equazioni (15.4.7) si ha

$$p = \frac{\partial F_1}{\partial q} = -\omega q \tan Q, \qquad P = \omega \frac{q^2}{2} \frac{1}{\cos^2 Q} \tag{15.4.20}$$

ed invertendo rispetto a q, p si ottiene

$$q = \sqrt{\frac{2P}{\omega}} \cos Q, \qquad p = -\sqrt{2P\omega} \sin Q \tag{15.4.21}$$

Completamento canonico. Consideriamo il problema che consiste nel determinare la trasformazione canonica che corrisponde ad una trasformazione di coordinate assegnata $Q_k =$

$f_k(\mathbf{q})$. Le equazioni della trasformazione tra i momenti sono definite da (15.4.13) e per renderle esplicite è sufficiente risolvere un sistema lineare. Come esempio consideriamo una trasformazione lineare nelle coordinate data da $\mathbf{Q} = \mathsf{A}\mathbf{q}$. Allora $\partial f_k(\mathbf{q})/\partial q_i = \mathsf{A}_{ki}$ e la trasformazione (1.4.15) si riscrive in forma matriciale

$$\mathbf{p} = \tilde{\mathsf{A}}\mathbf{P}, \qquad \longrightarrow \qquad \mathbf{P} = (\tilde{\mathsf{A}})^{-1}\mathbf{p} \tag{15.4.22}$$

15.5. TRASFORMAZIONI INFINITESIME

Consideriamo un gruppo di trasformazioni canoniche ad un parametro α e sia $F_2(\mathbf{q}, \mathbf{P}, \alpha)$ la funzione generatrice, che si riduce alla trasformazione identica per $\alpha = 0$. Se α è infinitesimo lo sviluppo di Taylor al primo ordine consente di scrivere

$$F_2(\mathbf{q}, \mathbf{P}; \alpha) = \sum_{i=1}^{d} q_i P_i + G(\mathbf{q}, \mathbf{P})\alpha + O(\alpha^2) \tag{15.5.1}$$

dove la funzione

$$G(\mathbf{q}, \mathbf{P}) = \left.\frac{\partial F_2}{\partial \alpha}(\mathbf{q}, \mathbf{P}; \alpha)\right|_{\alpha=0} \tag{15.5.2}$$

è detta generatrice infinitesima della trasformazione. Le trasformazioni generate da F_2 si scrivono

$$\begin{aligned} Q_i =& q_i + \alpha \frac{\partial G}{\partial P_i}(\mathbf{q}, \mathbf{P}) + O(\alpha^2) \\ p_i =& P_i + \alpha \frac{\partial G}{\partial q_i}(\mathbf{q}, \mathbf{P}) + O(\alpha^2) \end{aligned} \tag{15.5.3}$$

ed esplicitate al primo ordine in α, sono data da

$$\begin{aligned} Q_i =& q_i + \alpha \frac{\partial G}{\partial p_i}(\mathbf{q}, \mathbf{p}) + O(\alpha^2) \\ P_i =& p_i - \alpha \frac{\partial G}{\partial q_i}(\mathbf{q}, \mathbf{p}) + O(\alpha^2) \end{aligned} \tag{15.5.4}$$

L'invarianza della hamiltoniana rispetto ad un un gruppo di trasformazioni continue ad un parametro implica la conservazione del generatore infinitesimo del gruppo. A tal fine è opportuno notare che la derivata temporale di una variabile dinamica $A(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t)$ ha la espressione seguente

$$\frac{dA}{dt} = \sum_{i=1}^{d} \left(\frac{\partial A}{\partial q_i}\dot{q}_i + \frac{\partial A}{\partial p_i}\dot{p}_i \right) + \frac{\partial A}{\partial t} = \sum_{i=1}^{d} \left(\frac{\partial A}{\partial q_i}\frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial A}{\partial p_i}\frac{\partial H}{\partial q_i} \right) + \frac{\partial A}{\partial t} \tag{15.5.5}$$

Il cambiamento di una variabile dinamica $A(\mathbf{q}, \mathbf{p})$ per la trasformazione infinitesima si scrive

$$\delta A = A(\mathbf{Q}, \mathbf{P}) - A(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = \alpha \sum_{i=1}^{d} \left(\frac{\partial A}{\partial q_i}\frac{\partial G}{\partial p_i} - \frac{\partial A}{\partial p_i}\frac{\partial G}{\partial q_i} \right) + O(\alpha^2) \tag{15.5.6}$$

Il gruppo finito di trasformazioni che ha G come generatore è un flusso hamiltoniano, vedi paragrafo 16.2. La traiettoria $\mathbf{q}(\alpha), \mathbf{p}(\alpha)$ con punto iniziale $\mathbf{q}, \mathbf{p}$ per $\alpha = 0$ è soluzione di delle equazioni di Hamilton

$$\frac{dq_k}{d\alpha} = \frac{\partial G}{\partial p_k}, \qquad \frac{dp_k}{d\alpha} = -\frac{\partial G}{\partial q_k} \tag{15.5.7}$$

Introducendo il simbolo $[A, B]$, noto come parentesi di Poisson

$$[A, B] = \sum_{i=1}^{d} \left(\frac{\partial A}{\partial q_i} \frac{\partial B}{\partial p_i} - \frac{\partial A}{\partial p_i} \frac{\partial B}{\partial q_i} \right) \tag{15.5.8}$$

la derivata di A (che supponiamo non dipenda esplicitamente da t) lungo le traiettorie del gruppo generato da G e quelle del gruppo di evoluzione generato da H si scrivono

$$\frac{dA}{d\alpha} = [A, G], \qquad \frac{dA}{dt} = [A, H] \tag{15.5.9}$$

Teorema di Nöther. Se un gruppo ad un parametro di trasformazioni lascia invariante l'hamiltoniana H di un sistema, il generatore infinitesimo G è un integrale primo del moto.

Infatti se la variazione di H lungo le traiettorie del gruppo è nulla

$$\frac{dH}{d\alpha} = [H, G] = 0 \tag{15.5.10}$$

anche la variazione di G sulle traiettorie generate da H, è nulla (G non dipende da t)

$$\frac{dG}{dt} = [G, H] = -[H, G] = 0 \tag{15.5.11}$$

Il flusso generato da H è un gruppo ad un parametro, il tempo t, e $[G, H] = 0$ esprime la commutazione con il flusso del del gruppo di simmetria, vedi paragrafo 16.3.

15.6. PARENTESI DI POISSON

La parentesi di Poisson (15.5.8) di due variabili dinamiche A e B è uguale al prodotto scalare tra il gradiente di A ed il campo hamiltoniano generato da B,

$$[A, B] = \sum_{i,k=1}^{2d} \frac{\partial A}{\partial x_i} \mathsf{J}_{ik} \frac{\partial B}{\partial x_k} \equiv \frac{\partial A}{\partial \mathbf{x}} \cdot \mathsf{J} \frac{\partial B}{\partial \mathbf{x}} \tag{15.6.1}$$

Nella notazione matriciale infatti la parentesi di Poisson si riscrive come segue

$$[A, B] = \left(\widetilde{\frac{\partial A}{\partial \mathbf{q}}}, \widetilde{\frac{\partial A}{\partial \mathbf{p}}} \right) \begin{pmatrix} 0 & \mathsf{I} \\ -\mathsf{I} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial B}{\partial \mathbf{q}} \\ \frac{\partial B}{\partial \mathbf{p}} \end{pmatrix} \tag{15.6.2}$$

Usando coordinate non canoniche le parentesi di Poisson sono ancora definite da (15.6.1) dove J è sostituito dalla matrice antisimmetrica $\mathsf{P}(\mathbf{x})$, definita nel paragrafo 15.1.

Proprietà algebriche

La definizione data implica le seguenti proprietà algebriche

$$\begin{cases} [A,B] = -[B,A], \qquad [A,A] = 0 \\ [A, \lambda_1 B_1 + \lambda_2 B_2] = \lambda_1 [A, B_1] + \lambda_2 [A, b_2] \\ [A, BC] = [A,B]C + B[A,C] \end{cases} \tag{15.6.3}$$

dove A, B_1, B_2 sono variabili dinamiche e λ_1, λ_2 costanti reali. Vale inoltre la importante identità di Jacobi

$$[A,[B,C]] + [C,[A,B]] + [B,[C,A]] = 0 \tag{15.6.4}$$

che si dimostra per calcolo diretto esprimendo le parentesi di Poisson nella forma (15.5.8). Per provare la identità di Jacobi scriviamo

$$[[A,B],C] = \sum_{k=1}^{d} \left(\frac{\partial [A,B]}{\partial q_k} \frac{\partial C}{\partial p_k} - \frac{\partial [A,B]}{\partial p_k} \frac{\partial C}{\partial q_k} \right) \tag{15.6.5}$$

osservando che nello sviluppo di $[A,[B,C]] + [B,[C,A]]$ i coefficienti delle derivate seconde di C si annullano mentre i coefficienti delle derivate prime di C sono uguali a quelli che appaiono nel lato destro di (15.6.5).
Un risultato notevole segue dalla identità di Jacobi sostituendo la funzione C con l'hamiltoniana H di un sistema. Esprimendo le derivate temporali attraverso le parentesi di Poisson, vedi (15.5.9), e supponendo che A e B siano indipendenti dal tempo si ottiene la relazione

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}[A,B] &= [[A,B],H] = [A,[B,H]] + [B,[H,A]] = \\ &= [A,[B,H]] + [[A,H],B] = [A, \frac{dB}{dt}] + [\frac{dA}{dt}, B] \end{aligned} \tag{15.6.6}$$

da cui risulta che se A e B sono integrali primi del moto anche $[A,B]$ lo è.

Parentesi fondamentali

Le parentesi di Poisson sono indipendenti dalla scelta di coordinate canoniche rispetto a cui vengono calcolate. Al fine di provarlo scriviamo ora $[A,B]_{\mathbf{x}}$ oppure $[A,B]_{\mathbf{q},\mathbf{p}}$ per indicare che la parentesi è calcolata rispetto alle coordinate $\mathbf{x} = (\mathbf{q}, \mathbf{p})$. Le parentesi tra le coordinate ed i momenti vengono chiamate *Parentesi di Poisson fondamentali* e sono espresse da

$$[q_i, q_j]_{\mathbf{q},\mathbf{p}} = 0, \qquad [p_i, p_j]_{\mathbf{q},\mathbf{p}} = 0, \qquad [q_i, p_j]_{\mathbf{q},\mathbf{p}} = \delta_{i,j} \tag{15.6.7}$$

per $i, j = 1, \ldots, d$ oppure in forma compatta da

$$[x_i, x_j]_{\mathbf{x}} = \mathsf{J}_{i,j}, \qquad i,j = 1, \ldots, 2d \tag{15.6.8}$$

Le equazioni di Hamilton si scrivono

$$\dot{q}_i = [q_i, H]_{\mathbf{q},\mathbf{p}}, \qquad \dot{p}_i = [p_i, H]_{\mathbf{q},\mathbf{p}} \tag{15.6.9}$$

oppure in forma compatta

$$\dot{x}_i = [x_i, H]_{\mathbf{x}} \tag{15.6.10}$$

Le parentesi di Poisson fondamentali (15.6.8) sono l'analogo delle condizioni di ortogonalità della base in uno spazio euclideo e le trasformazioni canoniche, che preservano queste relazioni, l'analogo delle trasformazioni tra basi ortogonali. Alla parentesi di Poisson tra A e B corrisponde corrisponde il prodotto scalare tra i gradienti di A e B in uno spazio euclideo e alle parentesi d Poisson fondamentali corrisponde $\mathrm{grad}\, x_i \cdot \mathrm{grad} x_k = \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_k = \delta_{ik}$.

Invarianza

La proprietà più importante delle parentesi di Poisson è che queste non cambiano se si effettua una trasformazione canonica sulle coordinate. Per questa ragione le Parentesi di Poisson tra due variabili dinamiche si scrivono senza indicare il sistema di coordinate cui ci si riferisce.Quando si passa invece ad un sistema di coordinate non canonico la parentesi di Poisson assume una forma diversa poiché la matrice costante J è sostituita dalla matrice antisimmetrica $\mathsf{P} = \mathsf{M}\mathsf{J}\tilde{\mathsf{M}}$ dove M è la matrice Jacobiana della trasformazione definita da (15.1.15).

Proposizione. Se le parentesi di Poisson fondamentali sono invarianti per un trasformazione di coordinate $\mathbf{q}, \mathbf{p} \to \mathbf{Q}, \mathbf{P}$ allora lo sono anche le parentesi di Poisson di due variabili dinamiche qualsiasi.

Supponiamo che si abbia

$$[q_i, q_j]_{\mathbf{Q},\mathbf{P}} = 0, \qquad [p_i, p_j]_{\mathbf{Q},\mathbf{P}} = 0, \qquad [q_i, p_j]_{\mathbf{Q},\mathbf{P}} = \delta_{i,j} \qquad i, j = 1, \ldots, d \tag{15.6.11}$$

ossia nella notazione compatta

$$[x_i, x_k]_{\mathbf{X}} = [x_i, x_k]_{\mathbf{x}} \equiv \mathsf{J}_{i,k}, \qquad [X_i, X_k]_{\mathbf{x}} = [X_i, X_k]_{\mathbf{X}} \equiv \mathsf{J}_{i,k} \tag{15.6.12}$$

Usando la regola di derivazione di funzione composta nella notazione compatta si ha

$$\begin{gathered}
[A, B]_{\mathbf{X}} = \sum_{i,k=1}^{d} \frac{\partial A}{\partial X_i} \mathsf{J}_{ik} \frac{\partial B}{\partial X_k} = \sum_{i,k,\ell' m=1}^{d} \frac{\partial A}{\partial x_\ell} \frac{\partial x_\ell}{\partial X_i} \mathsf{J}_{ik} \frac{\partial x_m}{\partial X_k} \frac{\partial B}{\partial x_m} = \\
\sum_{i,k} \frac{\partial A}{\partial x_\ell} [x_\ell, x_m]_{\mathbf{X}} \frac{\partial B}{\partial x_m} = \sum_{i,k} \frac{\partial A}{\partial x_\ell} \mathsf{J}_{\ell m} \frac{\partial B}{\partial x_m} = [A, B]_{\mathbf{x}}
\end{gathered} \tag{15.6.13}$$

Teorema. Condizione necessaria e sufficiente perché la trasformazione $(q,p) \to (Q,P)$ sia canonica è che lasci invarianti le Parentesi di Poisson fondamentali.

L'invarianza delle parentesi di Poisson fondamentali è identica alla condizione di simpletticità della matrice jacobiana della trasformazione poiché essendo

$$(\mathsf{MJ\tilde{M}})_{ik} = \sum_{\ell,m=1}^{2d} \frac{\partial X_i}{\partial x_\ell} \mathsf{J}_{\ell m} \frac{\partial X_k}{\partial x_m} = [X_i, X_k]_{\mathbf{x}} \tag{15.6.14}$$

la prima condizione di simpletticità (15.1.18) implica $[X_i, X_k]_{\mathbf{x}} = \mathsf{J}_{ik} = [X_i, X_k]_{\mathbf{X}}$. La seconda condizione implica l'invarianza delle *parentesi di Lagrange* definite da

$$(\tilde{\mathsf{M}}\mathsf{JM})_{ik} = \sum_{\ell,m} \frac{\partial X_\ell}{\partial x_i} \mathsf{J}_{\ell m} \frac{\partial X_m}{\partial x_k} \equiv \{x_i, x_k\}_{\mathbf{X}} \tag{15.6.15}$$

che si scrive $\{x_i, x_k\}_{\mathbf{X}} = \mathsf{J}_{ik} = \{x_i, x_k\}_{\mathbf{x}}$. I ruoli delle variabili $\mathbf{x}$ e $\mathbf{X}$ si invertono scambiando la matrice M con la matrice M^{-1}.

Per completezza diamo una dimostrazione alternativa basata sulle condizioni di compatibilità (15.4.10) dedotte dalle funzioni generatrici della trasformazione canonica. Infatti

$$\begin{aligned}
[q_i, q_j]_{\mathbf{Q},\mathbf{P}} &= \sum_{k=1}^{d} \left(\frac{\partial q_i}{\partial Q_k}\frac{\partial q_j}{\partial P_k} - \frac{\partial q_i}{\partial P_k}\frac{\partial q_j}{\partial Q_k} \right) = \sum_{k=1}^{d} \left(-\frac{\partial q_i}{\partial Q_k}\frac{\partial Q_k}{\partial p_j} - \frac{\partial q_i}{\partial P_k}\frac{\partial P_k}{\partial p_j} \right) \\
[p_i, p_j]_{\mathbf{Q},\mathbf{P}} &= \sum_{k=1}^{d} \left(\frac{\partial p_i}{\partial Q_k}\frac{\partial p_j}{\partial P_k} - \frac{\partial p_i}{\partial P_k}\frac{\partial p_j}{\partial Q_k} \right) = \sum_{k=1}^{d} \left(\frac{\partial p_i}{\partial Q_k}\frac{\partial Q_k}{\partial q_j} + \frac{\partial p_i}{\partial P_k}\frac{\partial P_k}{\partial q_j} \right) \\
[q_i, p_j]_{\mathbf{Q},\mathbf{P}} &= \sum_{k=1}^{d} \left(\frac{\partial q_i}{\partial Q_k}\frac{\partial p_j}{\partial P_k} - \frac{\partial q_i}{\partial P_k}\frac{\partial p_j}{\partial Q_k} \right) = \sum_{k=1}^{d} \left(\frac{\partial q_i}{\partial Q_k}\frac{\partial Q_k}{\partial q_j} + \frac{\partial q_i}{\partial P_k}\frac{\partial P_k}{\partial q_j} \right)
\end{aligned} \tag{15.6.16}$$

possono essere riscritte nella forma

$$[q_i, q_j]_{\mathbf{Q},\mathbf{P}} = -\frac{\partial q_i}{\partial p_j} = 0, \qquad [p_i, p_j]_{\mathbf{Q},\mathbf{P}} = \frac{\partial p_i}{\partial q_j} = 0, \qquad [q_i, p_j]_{\mathbf{Q},\mathbf{P}} = \frac{\partial q_i}{\partial q_j} = \delta_{i,j} \tag{15.6.17}$$

La prova che l'invarianza delle parentesi di Poisson implica la canonicità della trasformazione è immediata se la trasformazione non dipende da t; basta infatti considerare $\mathbf{Q}$ e $\mathbf{P}$ come variabili dinamiche qualsiasi e calcolarne le derivate temporali. L'invarianza implica che l $\mathbf{Q}(t)$, $\mathbf{P}(t)$ soddisfano le equazioni canoniche di Hamilton.

$$\begin{aligned}
\dot{Q}_i &= [Q_i, H]_{\mathbf{q},\mathbf{p}} = [Q_i, H]_{\mathbf{Q},\mathbf{P}} = \frac{\partial H}{\partial P_i} \\
\dot{P}_i &= [P_i, H]_{\mathbf{q},\mathbf{p}} = [P_i, H]_{\mathbf{Q},\mathbf{P}} = -\frac{\partial H}{\partial Q_i}
\end{aligned} \tag{15.6.18}$$

Esempi

Calcoliamo per un punto materiale non vincolato le parentesi di Poisson con le componenti L_i del momento della quantità di moto.

$$[q_i, L_k] = \sum_{\ell,m} \epsilon_{k\ell m}[q_i, q_\ell p_m] = \sum_{\ell,m} \epsilon_{k\ell m} q_\ell [q_i, p_m] = \sum_{\ell,m} \epsilon_{k\ell m} q_\ell \delta_{im} = \sum_{\ell} \epsilon_{ik\ell} q_\ell \qquad (15.6.19)$$

La parentesi di Poisson con p_i e con L_i dà un risultato simile che si scrive $[p_i, L_k] = \sum_\ell \epsilon_{ik\ell} p_\ell$, $[L_i, L_k] = \sum_\ell \epsilon_{ik\ell} L_\ell$. Se $\mathbf{n}$ è un vettore unitario si può scrivere in forma vettoriale

$$[\mathbf{q}, \mathbf{n}\cdot\mathbf{L}] = \mathbf{n}\times\mathbf{q}, \qquad [\mathbf{p}, \mathbf{n}\cdot\mathbf{L}] = \mathbf{n}\times\mathbf{p}, \qquad [\mathbf{L}, \mathbf{n}\cdot\mathbf{L}] = \mathbf{n}\times\mathbf{L}, \qquad (15.6.20)$$

Ne segue che la parentesi di Poisson delle norme dei vettori $\mathbf{q}, \mathbf{p}, \mathbf{L}$ con $\mathbf{n}\cdot\mathbf{L}$ è nulla. Infatti

$$[\mathbf{q}\cdot\mathbf{q}, \mathbf{n}\cdot\mathbf{L}] = 2\mathbf{q}\cdot\mathbf{n}\times\mathbf{q} = 0 \qquad (15.6.21)$$

Da (15.6.20) segue che $\mathbf{n}\cdot\mathbf{L}$ è il generatore delle rotazioni attorno all'asse $\mathbf{n}$. Infatti la variazione di questi vettori per un valore α infinitesimo del parametro risulta essere data da

$$\delta\mathbf{q} = \alpha[\mathbf{q}, \mathbf{n}\cdot\mathbf{L}] = \alpha\mathbf{n}\times\mathbf{q}, \qquad \delta\mathbf{p} = \alpha[\mathbf{p}, \mathbf{n}\cdot\mathbf{L}] = \alpha\mathbf{n}\times\mathbf{p} \qquad (15.6.22)$$

Per l'hamiltoniana del campo centrale dato da

$$H = \frac{\mathbf{p}\cdot\mathbf{p}}{2m} + V(||\mathbf{q}||) \qquad (15.6.23)$$

oppure da (6.7.16) in coordinate polari è immediato verificare che $\mathbf{L}$ ha parentesi di Poisson nulla con H. Un insieme di integrali primi *in involuzione* è costituito da variabili dinamiche le cui parentesi di Poisson si annullano. Per il campo centrale questo insieme è dato da H, L, L_z dove d L_z può essere sostituito dalla proiezione $\mathbf{L}\cdot\mathbf{n}$ di $\mathbf{L}$ lungo un qualsiasi asse.

L'hamiltoniana di un corpo rigido libero con un asse di simmetria z' è data da (9.6.10) e H, L, L'_z sono integrali primi in involuzione tra loro come nel caso del campo centrale. Nel caso in cui si aggiunga il potenziale della forza peso $V = mgz$ gli integrali primi diventano H, L_z, L'_z.

15.7. L'INVARIANTE DI POINCARÉ-CARTAN

Consideriamo la forma differenziale $dA = \sum p_i dq_i - H dt$ il cui integrale lungo traiettorie con estremi $(\mathbf{q}_a, t_a)$, $(\mathbf{q}_b, t_b)$ nello spazio delle configurazioni definisce l'azione A, vedi (15.4.1), che è stazionaria sulla traiettoria fisica. Se si fa una trasformazione canonica dA cambia per un differenziale esatto, come si è visto nel paragrafo 15.4. Anche se dA non è un differenziale esatto esistono famiglie di curve chiuse lungo le quali l'integrale di dA è nullo.

Proposizione. Sia Σ una superficie nello spazio delle fasi esteso definita come famiglia a un parametro di curve $S_{t,0}(\eta)$ dove $S_{t,0}$ è il flusso di una hamiltoniana H e η una curva data. Indicando con $\oint$ l'integrale lungo una qualsiasi curva chiusa su Σ si ha

$$\oint \Big(\sum_i p_i \, dq_i - H dt \Big) = 0 \tag{15.7.1}$$

Per provarlo osserviamo dapprima che detta $\gamma(\lambda)$ una famiglia ad un parametro di curve nello spazio delle fasi esteso con estremi (q_a, t_a), (q_b, t_b) e $\gamma \equiv \gamma(0)$ la traiettoria fisica, il principio variazionale stabilisce che $A(\gamma(\lambda)) - A(\gamma) = O(\lambda^2)$. Sia $\gamma \in \Sigma$ e $\delta \in \Sigma$ una seconda curva con gli stessi estremi e che insieme formano una curva chiusa Γ. Se D la massima distanza dei punti di δ da γ, consideriamo n traiettorie fisiche tali che gli archi $\gamma_1, \ldots, \gamma_n$ intercettati da δ hanno distanza kD/n e che γ_{k-1} dista da γ_k ancora D/n. Indichiamo inoltre con δ_k e δ'_k i due archi definiti dall'intersezione di γ_{k-1} e γ_k con δ, vedi figura 15.7.1.

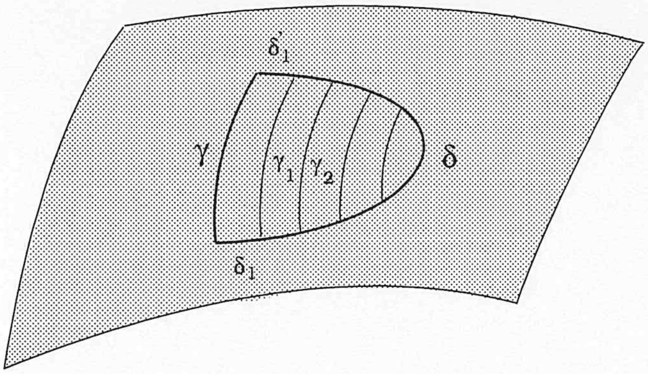

Figura 15.7.1. Curva chiusa $\gamma + \delta$ tracciata sulla superficie Σ.

Se Γ_k indica il percorso chiuso formato dalle traiettorie fisiche γ_{k-1}, γ_k (percorse in senso opposto e con $\gamma_0 = \gamma$) e dagli archi δ_k, δ'_k e Γ il percorso formato da γ e δ si ha

$$\oint_\Gamma \Big(\sum_i p_i \, dq_i - H dt \Big) = \sum_{k=1}^n \oint_{\Gamma_k} \Big(\sum_i p_i \, dq_i - H dt \Big) = \sum_{k=1}^n O(D^2 n^{-2}) = O(D^2 n^{-1}) \tag{15.7.2}$$

Infatti $\oint_{\Gamma_k}$ è la differenza tra l'azione calcolata sulla traiettoria fisica γ_{k-1} ed una traiettoria con gli stessi estremi formata da γ_k, δ_k, δ'_k e quindi risulta proporzionale al quadrato della variazione D/n. Il risultato segue prendendo il limite $n \to \infty$.
Una applicazione importante del risultato precedente si ha considerando una curva chiusa γ ed il suo evoluto $S_{t,0}(\gamma)$, che è una superficie cilindrica Σ detta *tubo di flusso*, vedi figura 15.7.2. Se γ' è una qualsiasi curva chiusa ottenuta sezionando il tubo, l'integrale lungo la curva ha sempre lo stesso valore

$$\oint_\gamma \Big(\sum_i p_i\, dq_i - H dt\Big) = \oint_{\gamma'} \Big(\sum_i p_i\, dq_i - H dt\Big) \tag{15.7.3}$$

Infatti presa una qualsiasi curva chiusa Γ su Σ, dal teorema precedente segue che $\oint_\Gamma = 0$. Scegliendo Γ formata da γ e γ' e da da una due curve δ e δ', che li uniscono, aventi distanza infinitesima e percorse in verso opposto, vedi figura 15.7.2, il risultato (15.7.3) segue.

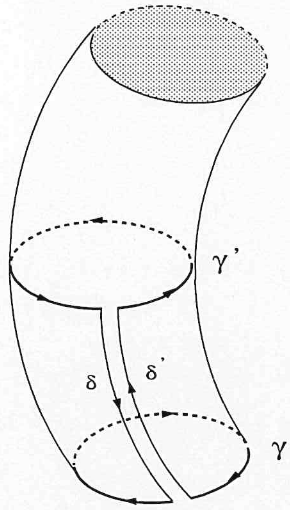

Figura 15.7.2. Tubo di flusso con base γ, evoluto γ' e percorso chiuso con le curve δ,δ'.

I teoremi valgono se al flusso hamiltoniano si sostituisce una famiglia ad un parametro di trasformazioni canoniche. Se γ è un'orbita chiusa di un sistema hamiltoniano (ottenuto ad esempio lasciando variare uno solo degli angoli che parametrizzano il toro $\mathbb{T}^d$ per un sistema integrabile, vedi paragrafo 18.3), dette Q_i, P_i le coordinate dei punti di una curva γ', ottenuti da quelli di γ per il medesimo valore λ del parametro della trasformazione canonica si ha

$$\oint_\gamma \sum p_i\, dq_i = \oint_{\gamma'} \sum P_i\, dQ_i \tag{15.7.4}$$

Il risultato segue da (15.7.3) tenendo conto che, se G è il generatore della trasformazione, il contributo $Gd\lambda$, che sostituisce Hdt, è nullo in quanto λ è costante. Poiché per un sistema a d gradi di libertà di hanno d cicli, detto γ_k il ciclo $k-$esimo si introducono d invarianti, detti ancora azioni e definiti da

$$j_k = \frac{1}{2\pi} \oint_{\gamma_k} \sum_{i=1}^{d} p_i\, dq_i \tag{15.7.5}$$